

МЕХАНИКА

Лектор: Жақыпов Әлібек Серікұлы

Тел: +7 705 660 69 63

e-mail: Alibek.Zhakupov@kaznu.edu.kz

6 лекция

«Закон сохранения импульса»

Цель лекции: Сформировать у студентов понимание законов сохранения импульса и механической энергии для систем тел, а также научить применять эти законы к анализу механического удара, расчету скоростей после столкновения и потерь кинетической энергии.

Задачи лекции:

1. Ввести понятие изолированной (замкнутой) механической системы и на основе второго и третьего законов Ньютона получить закон сохранения импульса.
2. Показать вывод закона сохранения механической энергии для системы тел с внутренними и внешними консервативными силами.
3. Рассмотреть графическое представление перераспределения потенциальной и кинетической энергии при движении тела в поле тяжести.
4. Ввести понятие механического удара, коэффициента восстановления и классификацию ударов по степени упругости.
5. Вывести формулы для скоростей тел при абсолютно упругом центральном ударе и формулу для скорости и потерь кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе.

Основные понятия и термины:

Закон сохранения импульса для изолированной системы – утверждение, согласно которому в изолированной механической системе, на которую не действуют внешние силы, векторная сумма импульсов всех тел остается постоянной во времени.

Закон сохранения механической энергии – результат, получаемый из уравнений движения при работе только консервативных сил внутри системы тел.

Механический удар — кратковременное взаимодействие тел, при котором за очень малое время происходит резкое изменение их скоростей и значительная часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию упругой и неупругой деформации.

Коэффициент восстановления при ударе – безразмерная величина, равная отношению относительной скорости тел после удара к относительной скорости до удара, взятому с противоположным знаком.

План лекции

1 Понятие изолированной системы тел. Вывод закона сохранения импульса из уравнений движения и третьего закона Ньютона.

2 Закон сохранения механической энергии для системы тел. Приращение кинетической и потенциальной энергии, условие сохранения полной механической энергии.

3 Графическое представление закона сохранения энергии на примере движения тела в поле тяжести. Изменение потенциальной и кинетической энергии при падении.

4 Механический удар тел. Определение, длительность, переход кинетической энергии в энергию деформации. Коэффициент восстановления.

5 Абсолютно упругий центральный удар. Применение законов сохранения импульса и энергии, вывод формул для скоростей после удара.

6 Абсолютно неупругий удар. Совместное движение «слипшихся» тел, формула для общей скорости и расчет потерь кинетической энергии.

«Закон сохранения импульса»

Изолированной механической системой тел называется система, на которую не действуют внешние силы.

Рассмотрим механическую систему состоящую из n тел. Запишем второй закон Ньютона

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) &= \vec{F}'_1 + \vec{F}_1 \\ \frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) &= \vec{F}'_2 + \vec{F}_2 \\ \frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) &= \vec{F}'_n + \vec{F}_n \end{aligned} \right\} \quad (+) \text{ сложим почленно}$$

где $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \vec{F}'_n$ - равнодействующие внутренних консервативных сил
 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_n$ - равнодействующие внешних консервативных сил

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

По 3-му закону Ньютона геометрическая сумма внутр. сил = 0, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \text{ где } \vec{p} = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) - \text{импульс системы} \end{aligned}$$

Для изолированной системы внешних сил нет

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= 0 - \text{закон сохранения импульса} \\ \vec{p} &= \text{const} \text{ Импульс замкнутой системы сохраняется} \end{aligned}$$

Закон сохранения энергии

Рассмотрим механическую систему состоящую из n тел. Запишем второй закон Ньютона:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}'_1 + \vec{F}_1 \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}'_2 + \vec{F}_2 \\ m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} &= \vec{F}'_n + \vec{F}_n \end{aligned} \right\}$$

где $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \vec{F}'_n$ - равнодействующие внутренних консервативных сил
 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_n$ - равнодействующие внешних консервативных сил

Умножим каждое на dr_i , при этом помним, что: $dr_i = \vec{v}_i \cdot dt$

Проведем математические действия с левой частью выражения :

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot d\vec{r}_1 = (\vec{F}'_1 + \vec{F}_1) \cdot d\vec{r}_1 = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot \vec{v}_1 dt = m_1 \cdot \vec{v}_1 d\vec{v}_1$$

$$\text{Итак: } m_1 \cdot \vec{v}_1 d\vec{v}_1 = (\vec{F}'_1 + \vec{F}_1) \cdot d\vec{r}_1$$

Далее перепишем систему исходных уравнений и почленно их сложим:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1 - (\vec{F}'_1 + \vec{F}_1) d\vec{r}_1 &= 0 \\ m_2 \vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2 - (\vec{F}'_2 + \vec{F}_2) d\vec{r}_2 &= 0 \\ m_n \vec{v}_n \cdot d\vec{v}_n - (\vec{F}'_n + \vec{F}_n) d\vec{r}_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (+) \text{ сложим почленно}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i) - \sum_{i=1}^n (\vec{F}'_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dE_k \quad - \text{приращение кинетической энергии}$$

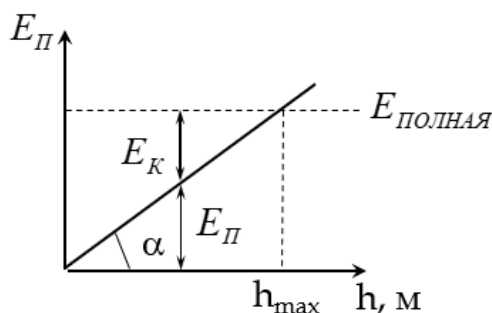
$$-\sum_{i=1}^n (\vec{F}'_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i = dE_{\Pi} \quad - \text{приращение потенциальной энергии}$$

$$dE_k + dE_{\Pi} = 0 \text{ проинтегрируем } \int_1^2 d(E_k + E_{\Pi}) = 0 \Rightarrow$$

$E_k + E_{\Pi} = \text{const}$ В консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

Графическое представление закона сохранения энергии.

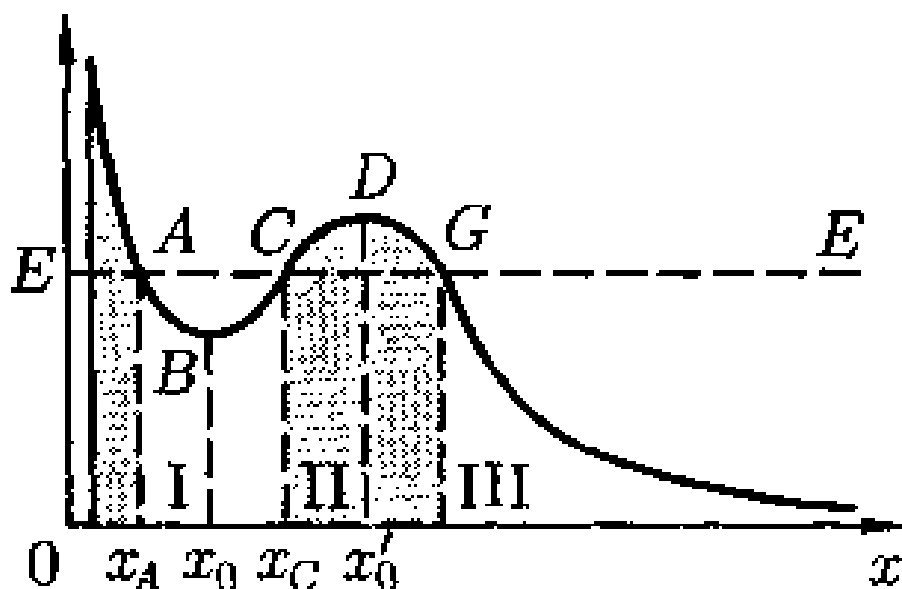
Тело, массы m поднятое на высоту h обладает потен-циальной энергией:
 $E_{\Pi} = mgh$ график прямая из $(0,0)$.



$\text{tg} \alpha = mg$ Падая, тело уменьшает потенц. энергию и увеличивает кинетическую.

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = mgh_{\max}$$

$$v = \sqrt{2g(h_{\max})}$$



Механический удар тел

Удар заключается в следующем: кинетическая энергия за короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Опыты показывают, что относительная скорость тел после удара ниже расчетной, т. к. нет идеально упругих тел. Характеристикой этого факта служит коэффициент восстановления:

$$\varepsilon = \frac{v'_{\text{после удара}}}{v_{\text{до удара}}}$$

При $\varepsilon=0$ тела абсолютно **неупругие**

При $\varepsilon=1$ тела абсолютно **упругие**

На практике $0 < \varepsilon < 1$ $\varepsilon=0,56$ – сталь, $\varepsilon=0,01$ – свинец.

Удар называется **центральный**, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

Абсолютно упругий удар – это такой удар, при котором вся кинетическая энергия системы до удара переходит полностью в кинетическую энергию после удара.

При этом выполняются законы сохранения импульса и энергии (потенциальная энергия не меняется).

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 &= m_1 \cdot \vec{v}'_1 + m_2 \cdot \vec{v}'_2 \\ \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \vec{v}_2^2}{2} &= \frac{m_1 \cdot \vec{v}'_1{}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \vec{v}'_2{}^2}{2} \end{aligned} \right\}$$

Где: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ скорости шаров до удара $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$ - после удара

Перенесем слагаемые с индексами 1 в одну часть, а с 2 в друг.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_1') &= m_2 \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_2) \\ m_1 \cdot (\vec{v}_1^2 - \vec{v}_1'^2) &= m_2 \cdot (\vec{v}_2'^2 - \vec{v}_2^2) \end{aligned} \right\}$$

Раскроем разность квадратов во втором уравнении

$$m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_1') \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_1') = m_2 \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_2' + \vec{v}_2)$$

Заметим, что эти выражения равны.

$$m_2 \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_1') = m_2 \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_2' + \vec{v}_2)$$

Сокращая на равные части, получим $\vec{v}_1 + \vec{v}_1' = \vec{v}_2' + \vec{v}_2$

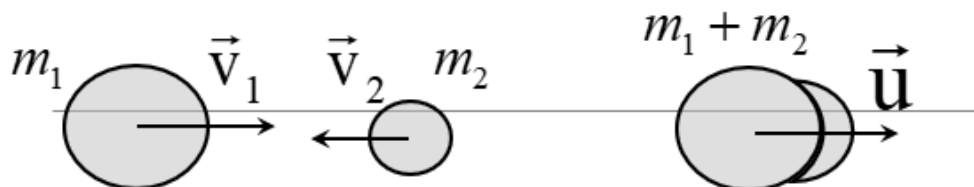
$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_1') &= m_2 \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_2) \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_1' &= \vec{v}_2' + \vec{v}_2 \end{aligned} \right\}$$

Решим систему относительно $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot \vec{v}_1 + 2m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot \vec{v}_2 + 2m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

Формулы для расчета скоростей после абсолютно упругого удара.



Абсолютно неупругий удар – это столкновение, после которого тела объединяются (слипаются) и далее двигаются совместно.

Для абсолютно неупругого удара выполняется только закон сохранения импульса. Законом сохранения энергии очень трудно пользоваться, т.к. трудно учесть долю энергии, расходуемой на деформацию, изменение температуры и т. д. Следовательно:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \text{ - формула для скорости после неупругого удара}$$

Что же происходит с кинетической энергией?

Из-за деформации тел происходит потеря энергии. Предлагаю ее найти.

$$\Delta E_k = \left(\frac{m_1 \cdot \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \vec{v}_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) \cdot \vec{u}^2}{2} = E_{k(\text{до удара})} - E_{k(\text{после удара})}$$

Подставим вместо $\vec{u}$ выражение $\{\otimes\}$ тогда:

$$\Delta E_k = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

Каждому студенту я предлагаю дома, самостоятельно получить эту формулу!

Контрольные вопросы

1. Дай определение изолированной механической системы и сформулируй закон сохранения импульса для такой системы.
2. При каком условии для системы тел выполняется закон сохранения механической энергии и как связаны приращения кинетической и потенциальной энергии
3. Что называется механическим ударом какие особенности движения и энергии тел характерны для ударного взаимодействия
4. Как определяется коэффициент восстановления при ударе и какие значения он принимает для абсолютно упругого и абсолютно неупругого столкновения
5. В чем состоит принципиальное различие между абсолютно упругим и абсолютно неупругим центральным ударом какие законы сохранения используются при их анализе и что происходит с кинетической энергией системы в каждом случае

Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высш. шк., 1990.- 478 с.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики М.: Высш. шк., 1989.- 608 с.
3. Савельев И.В. Общий курс физики. Т1. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука, 1988.- 416 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.- М.: Наука, 1985.
5. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.1,2,3.-М.: Наука, 1974,1980
6. Сивухин Д.В. Курс общей Физики. – М.: Наука, 1986. Т. 1.